à Monseigneur Capaccini
de la part de l'auteur

107

Résumé
d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste
et
sur un nouveau calcul, appellé Calcul des limites ;

par M. Augustin Cauchy,
membre de l'institut de France.

Turin. Octobre 1831.

Sur la mécanique Céleste
et sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions diverses.

(lu à l'académie de Turin dans la séance du 11 oct. 1831).

Avant d'indiquer d'une manière plus précise l'objet des recherches que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, il ne sera pas inutile de dire à quelle occasion elles ont été entreprises.

Les méthodes que les géomètres ont employées pour déduire du principe de la gravitation les mouvements des corps célestes laissaient encore beaucoup à désirer. Souvent elles manquaient de la rigueur convenable. Ainsi en particulier on ne trouve nulle-part dans la Mécanique Céleste de Laplace une démonstration suffisante de la formule de Lagrange, qui sert pourtant de base à la plupart des théories exposées dans cet ouvrage. D'ailleurs pour déterminer, à l'aide de ces méthodes, les coefficients numériques relatifs à telle ou telle perturbation des mouvements planétaires, les astronomes étaient quelquefois obligés d'entreprendre des calculs qui exigeaient plusieurs années de travail. Un des membres les plus distingués de cette Académie, M. Plana, m'ayant parlé dernièrement encore du temps que consumaient de pareils calculs, je lui dit que j'étais persuadé qu'il serait possible de les abréger, et même de déterminer immédiatement le coefficient numérique correspondant à une inégalité donnée. Effectivement au bout de quelques jours, je lui rapportai des formules à l'aide desquelles on pouvait résoudre de semblables questions, et dont j'avais déjà fait l'application à la détermi-

notion de certains nombres qu'il est utile de considérer dans la théorie de Saturne et de Jupiter. Quelques jours après, en s'appuyant sur des résultats qu'il avait obtenus dans un de ses mémoires, M. Plana m'a dit avoir retrouvé ou les mêmes formules ou des formules du même genre. Au reste, pour établir les formules dont il s'agit et d'autres formules analogues que renferme le mémoire cy joint, il suffit d'appliquer au développement de la fonction, désignée par R dans la Mécanique Céleste, des théorèmes bien connus tels que le théorème de Taylor et le théorème de Lagrange sur le développement des fonctions des racines des équations algébriques ou transcendantes. Mais on a besoin de recourir à d'autres principes et à de nouvelles méthodes pour arriver à des résultats plus importants dont je vais maintenant donner une idée.

En joignant à la série de Stirling ou de Maclaurin le reste qui la complète, et présentant ce reste sous la forme que Lagrange lui a donnée ou sous d'autres formes du même genre, on peut s'assurer, dans un grand nombre de cas, qu'une fonction $f(x)$ de la variable x est développable pour certaines valeurs de x en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable, et déterminer la limite supérieure des modules* des valeurs réelles ou imaginaires de x, pour lesquels le développement

---

* Le module d'une valeur imaginaire de x est la racine carrée positive de la somme qu'on obtient en ajoutant le carré de la partie réelle au carré du coefficient de $\sqrt{-1}$. Lorsque ce coefficient s'évanouit, le module se réduit à la valeur numérique de x.

subsiste. Ajoutons que, pour développer une fonction explicite de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots\ldots$ c'est à dire, en une série convergente dont le terme général soit une fonction entière et homogène de $x, y, z, \ldots$, il suffit de remplacer la fonction proposée $f(x, y, z, \ldots)$ par $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$, puis de développer $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de α, et de poser ensuite $\alpha = 1$. Par conséquent la théorie du développement des fonctions explicites de plusieurs variables se ramène immédiatement à la théorie du développement des fonctions explicites d'une seule variable. Mais il importe d'observer que l'application des règles, à l'aide desquelles on peut décider si la série de Stirling est convergente ou divergente, devient souvent très difficile, attendu que, dans cette série, le terme général ou proportionnel à x^n renferme la dérivée de l'ordre n de la fonction $f(x)$ ou du moins sa valeur correspondante à une valeur nulle de x; et que, hormis certains cas particuliers, la dérivée de l'ordre n d'une fonction donnée prend une forme de plus en plus compliquée, à mesure que n augmente.

Quant aux fonctions implicites, on a présenté, pour leurs développements en séries, diverses formules déduites le plus souvent de la méthode des coefficients indéterminés. Mais les démonstrations qu'on a prétendu donner de ces formules sont généralement insuffisantes 1° parce qu'on n'a point examiné si les séries sont convergentes ou divergentes, et qu'en conséquence on ne peut dire le plus souvent dans quels cas les formules doivent être admises ou rejettées, 2° parce qu'on ne s'est point attaché à démontrer que les développements obtenus avaient pour sommes les fonctions développées, et qu'il peut arriver qu'une série convergente provienne du développement d'une fonction,

sans que la somme de la série soit équivalente à la fonction elle-même. Il est vrai que l'établissement de règles générales propres à déterminer dans quels cas les développements des fonctions implicites sont convergents et représentent ces mêmes fonctions paraissait offrir de grandes difficultés. On peut en juger en lisant attentivement le mémoire de M. Laplace sur la convergence ou la divergence de la série que fournit, dans le mouvement elliptique d'une planète le développement du rayon vecteur suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Je pense donc que les géomètres et les astronomes attacheront quelque prix à mon travail quand ils apprendront que je suis parvenu à établir, sur le développement des fonctions soit explicites soit implicites, des principes généraux, et d'une application facile, à l'aide desquels on peut non seulement démontrer avec rigueur les formules, et indiquer les conditions de leur existence, mais encore fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries. Parmi ces règles, celles qui se rapportent à la fixation des limites des erreurs commises présentent dans leur ensemble un nouveau calcul que je désignerai sous le nom de calcul des limites. Je me contenterai d'indiquer ici en peu de mots quelques unes des propositions fondamentales sur lesquelles repose le calcul dont il s'agit.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\bar{x}$ dont le module soit X, le rapport de $\bar{x}$ à X sera une exponentielle de la forme $e^{p\sqrt{-1}}$, p désignant un certain arc réel que l'on pourra supposer compris entre les limites $-\pi$, $+\pi$; et le module de $f(\bar{x})$ dépendra tout à la fois du module X et de l'arc p. Or parmi les valeurs que

suivant les puissances ascendantes de α, et de poser dans cette limite $\alpha = 1$.

Les principes que nous venons d'établir s'appliquent très facilement aux séries qui représentent les développements des fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables; et fournissent, pour ces séries non seulement des règles générales de convergence, mais encore des limites supérieures aux modules des termes généraux, et aux erreurs que l'on commet quand on calcule seulement un certain nombre de termes en négligeant tous les autres. Pour étendre l'application des mêmes principes aux séries qui représentent les développements d'une ou de plusieurs fonctions implicites déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, il suffit d'observer qu'en vertu de la formule de Lagrange, et des formules analogues qui se déduisent du calcul des résidus, les coefficients des termes généraux, dans ces mêmes séries, peuvent être, comme dans les séries de Taylor et de Stirling, exprimés au moyen des dérivées des divers ordres de certaines fonctions, et qu'en conséquence la détermination de limites supérieures aux modules des termes généraux et aux restes des séries peut être réduite à la détermination des modules maxima de ces mêmes fonctions. On pourra donc établir pour les séries proposées des règles de convergence, et trouver des limites supérieures aux restes des séries ou plutôt à leurs modules. La seule question qui restera indécise sera de savoir si les séries, supposées convergentes, ont effectivement pour sommes les fonctions implicites dont le développement les a produites. Or on peut s'appuyer, pour résoudre cette question, sur des propositions générales semblables à celles que je vais énoncer.

1er théorème. Supposons qu'une fonction implicite u de la variable x soit déterminée par une équation algébrique ou transcendante, qu'elle se réduise à u_0 pour une valeur nulle de x, et que l'on ait développé cette fonction implicite en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x par la formule de Stirling, de Lagrange, etc..., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. La somme de cette série représentera la fonction u, si la valeur de x est tellement choisie que, la série étant convergente, la fonction explicite de x et u, qui constitue le premier membre de l'équation donnée soit elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u-u_0$.

2e théorème. Supposons que plusieurs fonctions implicites $u, v, w, \ldots$ de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ soient déterminées par une ou plusieurs équations algébriques ou transcendantes, qu'elles se réduisent à $u_0, v_0, w_0, \ldots$ pour des valeurs nulles de $x, y, z, \ldots$, et qu'on ait développé ces fonctions implicites en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ par les formules de Stirling, de Lagrange, etc.... ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs de $u, v, w, \ldots$, si les valeurs de $x, y, z, \ldots$ sont tellement choisies que, les séries étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ qui constituent les premiers membres des équations données soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes des variables $x, y, z, \ldots$ et des différences $u-u_0$, $v-v_0$, $w-w_0$, ...

Pour démontrer ces propositions, il suffit évidemment d'observer que, si les conditions énoncées sont remplies, les premiers membres des équations données, après les substitutions des valeurs générales de $u-u_0$, $v-v_0$, $w-w_0$, ... seront encore des séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, et que, dans ces séries convergentes, le coefficient de chaque terme sera identiquement nul.

Au surplus, sans le secours de ces propositions, et en s'appuyant sur des formules générales que fournit le calcul des résidus, on peut établir directement des règles dignes de remarque sur la convergence des séries qui représentent les développements des fonctions implicites, et sur la fixation des limites supérieures aux modules des restes qui complètent les séries.

Les propositions ci-dessus mentionnées peuvent encore être facilement étendues au cas où les fonctions implicites seraient déterminées par des équations aux différences finies ou infiniment petites, ou aux différences partielles, ou aux différences mêlées. Ainsi, en particulier, on pourra énoncer le théorème suivant.

3e Théorème. Soient données plusieurs équations différentielles simultanées entre la variable x, des fonctions inconnues $y, z, \ldots$ de cette variable, et leurs dérivées de divers ordres $y', z', \ldots$ $y'', z'', \ldots$ Supposons d'ailleurs que par la méthode des coefficients indéterminés on ait développé $y, z, \ldots$ en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Les sommes de ces séries représenteront les valeurs générales de $y, z, \ldots$, si la valeur de x est tellement choisie que, les séries dont il s'agit et par suite celles qui représenteront les dérivées de $y, z, \ldots$ étant convergentes, les fonctions explicites de $x, y, z, \ldots y', z', \ldots$, qui constituent les premiers membres des équations données, soient elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x et des différences qu'on obtient en retranchant des valeurs générales de

$y, z, \ldots y', z', \ldots$ leurs valeurs initiales correspondantes à $x=0$.

Je n'ai pu qu'indiquer rapidement quelques uns des principaux résultats contenus dans le mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie. Ce mémoire renferme encore 1° une théorie de la variation des constantes arbitraires* plus générale et à quelques égards plus simple que celles qui se trouvent exposées dans les mémoires de MM. Lagrange, Laplace et Poisson, 2° des intégrales définies propres à représenter, dans le développement connu de la fonction R, le coefficient du sinus ou du cosinus d'un angle donné, 3° des formules d'interpolation qui servent à déterminer une fonction entière de $\sin x$ et de $\cos x$, quand on connaît un nombre suffisant de valeurs particulières de cette même fonction, 4° plusieurs développements nouveaux de la fonction R, avec des formules propres non seulement à fournir les termes généraux de ces développements, mais encore à déterminer les limites des erreurs commises quand on conserve seulement certains termes en négligeant tous ceux qui les suivent. Je montre aussi dans quels cas l'un de ces développements doit être employé de préférence à l'autre. Ainsi, en particulier, si l'on demande les perturbations produites dans le mouvement d'une planète par une autre planète située à très peu près à la même distance du soleil que la première, le développement employé jusqu'ici par les astronomes devra être rejetté, et il

---

* Dans un mémoire présenté à l'Institut, M. Ostrogradsky s'était aussi occupé de la variation des constantes arbitraires, et il avait appliqué, à ce que je crois, une formule de M. Fourier à la conversion des termes qui composent le développement de la fonction R en intégrales définies. Mais, n'ayant qu'un souvenir confus de ce mémoire, tout ce que je puis dire ici, c'est que, dans le cas où quelques unes de ses formules coïncideraient avec quelques unes des miennes, je ne prétends en aucune manière lui contester la priorité.

DSI

prendra le module de $f(\bar{x})$ quand on fera varier p, il y en aura généralement une qui sera supérieure à toutes les autres. C'est cette valeur *maximum* du module de $f(\bar{x})$ que je considère spécialement dans le calcul des limites. Je la désigne par la lettre caractéristique Λ placée devant la fonction $f(\bar{x})$, et je prouve 1° que la fonction $f(x)$ est développable par le théorème de Stirling en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, lorsque, le module de x étant égal ou inférieur à X, la fonction $f(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable réelle ou imaginaire x ; 2° qu'alors, dans le développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, le coefficient de x^n offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par X^n le module *maximum* de $f(\bar{x})$. Cela posé, si l'on attribue à x une valeur imaginaire dont le module soit désigné par ξ, le module du terme général, dans le développement de $f(x)$, sera inférieur au produit de $\Lambda f(\bar{x})$ par la n^{me} puissance du rapport $\frac{\xi}{X}$. D'ailleurs, lorsque la fonction $f(x)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, le reste qui complète cette série, prolongée jusqu'au n^{me} terme, équivaut à la somme des termes dans lesquels l'exposant de x est égal ou supérieur à n. Donc le module de ce reste, s'il est imaginaire, ou sa valeur numérique, s'il est réel, ne surpassera pas la somme des termes correspondants à ceux que nous venons d'indiquer dans la progression géométrique ci-dessus mentionnée, c'est à dire, le reste qui complète cette progression. Ainsi la détermination d'une limite supérieure au reste, qui complète la série propre à représenter le développement d'une fonction quelconque, se trouve ramenée à la

détermination des restes des progressions géométriques, c'est à dire, à une question résolue depuis longtemps en analyse. On sait en effet que, dans la progression géométrique qui a pour premier terme l'unité, et pour raison $\frac{\xi}{X}$, la somme des termes dans lesquels ξ porte un exposant égal ou supérieur à n, équivaut au quotient du n^{me} terme par la différence $1-\frac{\xi}{X}$. Lorsque le premier terme devient $\Lambda f(\bar{x})$, il faut multiplier par ce premier terme le quotient dont il s'agit.

Il est important d'observer que, d'après ce qu'on vient de dire, les limites supérieures aux modules du terme général de la série de Stirling et du reste qui complète cette série sont des fonctions du module X, qui représentent les maxima relatifs à p des modules de certaines fonctions de la variable imaginaire $\bar{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}$. D'ailleurs le module X doit surpasser le module ξ, et être déterminé de manière que la fonction $f(x)$ reste finie et continue pour le module X ou pour un module plus petit de la variable x. Or, parmi les valeurs de X qui remplissent ces deux conditions, on devra évidemment choisir de préférence celles qui rendront les limites supérieures dont il s'agit les plus petites possibles; et alors ces limites, considérées comme valeurs particulières des fonctions de $\bar{x}$ ci-dessus mentionnées, seront tout à la fois des <u>maxima</u> relativement à l'angle p, et des <u>minima</u> relativement au module X, ou, ce que nous avons nommé dans un autre mémoire les modules principaux de ces mêmes fonctions.

Au surplus, quand on se propose uniquement de calculer des limites supérieures aux modules des termes généraux ou des restes des séries, il n'est point nécessaire de déterminer exactement les modules principaux dont il est ici question; et l'on peut se contenter de chercher des nombres supérieurs à ces modules.

Il est facile d'étendre les principes que nous venons d'indiquer aux fonctions de plusieurs variables. Soit en effet $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction donnée des variables $x, y, z, \ldots$ Si l'on attribue à ces variables des valeurs imaginaires $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ dont les modules soient respectivement $X, Y, Z, \ldots$ le module de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$ dépendra tout à la fois des modules $X, Y, Z, \ldots$ et des rapports imaginaires $\frac{\bar{x}}{X}, \frac{\bar{y}}{Y}, \frac{\bar{z}}{Z}$, etc... Or on peut choisir ces rapports, ou plutôt les arcs de cercle qui s'y trouvent renfermés, de manière que le module de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$ acquière la plus grande valeur possible, les nombres X, Y, Z restant les mêmes. C'est cette plus grande valeur ou cette valeur <u>maximum</u> que je désigne par la caractéristique Λ placée devant la fonction $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$; et je prouve 1° que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, quand les modules des variables $x, y, z, \ldots$ étant égaux ou inférieurs à $X, Y, Z, \ldots$ la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ reste finie et continue pour les modules $X, Y, Z, \ldots$ ou pour des modules plus petits de ces mêmes variables; 2° qu'alors, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$ le coefficient de $x^n y^{n'} z^{n''} \ldots$ offre un module inférieur au quotient qu'on obtient en divisant par $X^n Y^{n'} Z^{n''} \ldots$ le module maximum de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$. Cela posé, si l'on attribue à $x, y, z, \ldots$ des valeurs réelles ou imaginaires dont les modules $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ soient plus petits que $X, Y, Z, \ldots$, les divers termes du

développement de la fonction $f(x, y, z, \dots)$ offriront des modules respectivement inférieurs aux termes correspondants d'une fonction de ξ, η, ζ, … qu'on obtiendra en multipliant le module maximum de $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$ par les sommes des progressions géométriques qui ont pour premiers termes l'unité et pour raisons les rapports $\frac{\xi}{X}, \frac{\eta}{Y}, \frac{\zeta}{Z}, \dots$ Donc, si l'on néglige, dans le développement de la première fonction $f(x, y, z, \dots)$ certains termes, par exemple, ceux dans lesquels l'exposant de x est égal ou supérieur à n, l'exposant de y égal ou supérieur à n', l'exposant de z égal ou supérieur à n'', etc…., l'erreur* commise sera plus petite que la somme des termes correspondants de la seconde fonction, et par conséquent inférieure au produit de $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$ par les restes des progressions géométriques ci-dessus mentionnées.

Observons encore qu'après avoir déterminé en fonction de X, Y, Z une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(x, y, z, \dots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \dots$, on devra choisir $X, Y, Z, \dots$ de manière à rendre cette limite la plus petite possible.

Si l'on voulait obtenir une limite supérieure à la somme des modules des termes qui, dans le développement de $f(x, y, z, \dots)$, offrent un degré égal ou supérieur à n, c'est à dire, des termes dans lesquels les exposants de $x, y, z, \dots$ offrent une somme égale ou supérieure à n, il suffirait de chercher une limite supérieure au reste de la série qui représente le développement de $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \dots)$

---

* Lorsque les termes négligés sont réels l'erreur commise a pour mesure la valeur numérique de leur somme. Lorsqu'ils deviennent imaginaires, le module de cette même somme peut servir à mesurer l'erreur dont il s'agit.

DSI

faudra lui substituer un des autres développements ci-dessus mentionnés. On devra donc recourir à ces nouveaux développements, dans la théorie des petites planètes, quand on recherchera les inégalités qui dépendent de leurs attractions mutuelles.

Au reste, si l'Académie attache quelque prix aux travaux dont je viens de l'entretenir, je pourrai sous peu de temps lui offrir d'autres mémoires dans lesquels je montrerai d'une part comment on peut appliquer le calcul des résidus à la théorie du développement des fonctions implicites, et de l'autre comment on peut s'assurer de la convergence des séries qui représentent les intégrales des équations différentielles linéaires ou non linéaires, et fixer des limites supérieures aux modules des restes qui complètent ces mêmes séries.

Turin, ce 15 octobre 1831.

DS

Monsieur le Comte,

J'ai reçu les deux lettres que Votre Excellence m'a fait l'honneur de m'écrire. Elle a eu tant de bonté pour moi que j'espère qu'elle voudra bien me permettre de recourir encore à elle pour lui demander un conseil. Pour un motif connu de Votre Excellence j'aurais besoin de prendre sous mon nom et en ma qualité de professeur à l'Université de Turin un passeport Sarde pour l'Allemagne. J'en ai parlé au Comte Viguier qui m'a dit qu'il n'y avait nulle difficulté à m'accorder ce passeport, et que la seule condition à remplir de ma part était de lui présenter un mot de Votre Excellence ou même de M. de Collegno qui m'autorisât à m'absenter de Turin jusqu'au moment

DSI

74

de la rentrée de l'Université. Il n'est pas nécessaire que l'autorisation énonce la partie de l'Allemagne que je me propose de visiter. Je me suis adressé à M. de Collegno, sans lui confier le secret connu de Votre Excellence. Il m'a reçu avec bonté, et désiré toutefois que ma demande fût placée mardi prochain sous les yeux du magistrat de la Réforme. D'autre part, quoique les examens se terminent lundi ou mardi pour la majorité des élèves, il en est deux qui n'étant pas en règle (l'un d'eux pour cause de maladie) devront être examinés plus tard, et l'on désirerait qu'ils fussent examinés par le Professeur. Cette considération n'arrêterait certainement pas M. de Collegno, s'il connaissait le véritable état de la question, ce qui serait à désirer dans l'intérêt du cours de physique mathématique, afin que je pusse dès à présent m'entendre avec lui sur ce qu'il y aurait à faire dans le cas où je resterais à Prague. C'est ce qui m'engage à prier Votre Excellence de vouloir bien me dire si elle juge que je doive confier le secret à M. de Collegno, ou si elle préfère m'envoyer elle-même l'autorisation de m'absenter pendant quelques mois. Je la prie d'avoir la bonté de m'adresser sa réponse le plus tôt possible, et d'agréer le nouvel hommage du respectueux dévouement avec lequel je suis

Monsieur le Comte,

de Votre Excellence

le très humble et très obéissant serviteur

A. L. Cauchy

Turin ce 13 juillet 1833

P.S. Je ne sais s'il était dans l'intention de Votre Excellence de garder ou de me renvoyer la copie de la lettre de M. de Damas qui s'est retrouvée perdue dans les plis de ma première lettre. Dans tous les cas, il n'y a nul inconvénient à la laisser ici à Votre Excellence qui pourra la détruire, si elle lui est inutile.

J'ai remis ce matin au secrétariat pour être imprimés dans le Compte rendu deux articles qui me concernent, savoir 1° un rapport sur M. de Gasparin, 2° un mémoire ou note (~~sur le dernier~~ d'Astronomie).

Il n'y a rien à revoir dans le rapport ni dans le préambule du mémoire (vous remettrez seulement le mot mémoire qui s'y trouve ~~au lieu~~ à la place de mot note). Mais l'analyse du mémoire ayant été écrite rapidement, il est nécessaire que je la revoye avant l'impression. Si je n'avais pas été fortement saisi par la grippe, j'aurais été moi-même la relire à l'imprimerie. Obligé de garder la chambre, je vous prie d'avoir la bonté de me la faire passer aussitôt que le mémoire sera

très pressé

A Monsieur

Bachelier

mouvoir, je vous le renverrai dans la matinée,

A. L. C.

Cauchy

M. Augustin Cauchy a reçu la lettre par laquelle Monsieur de Salvandy lui a fait l'honneur de l'informer qu'il avait mis à sa disposition un exemplaire des œuvres de Laplace, réimprimées en exécution de la loi du 11 juin 1842.

Quoique la modeste bibliothèque de M. Cauchy renferme déjà les principaux ouvrages de Lagrange et de Laplace, donnés souvent à lui-même par ces deux illustres géomètres, que l'on sait avoir eu pour lui tant de bienveillance, il aimerait à joindre aux anciennes éditions l'édition nouvelle des œuvres mathématiques de Laplace, particulièrement de la mécanique céleste. Mais une difficulté survenue s'oppose à ce que M. Cauchy accepte immédiatement l'offre bienveillante de Monsieur de Salvandy; et cette difficulté, Monsieur de Salvandy <u>seul</u> est capable de la résoudre.

M. Cauchy regretterait infiniment de ne pouvoir répondre que par un refus à l'obligeance de Monsieur de Salvandy, dont il estime les talents et le caractère. Le souvenir de la conduite

Cauchy (Baron Augustin Louis)
mathématicien
1789 – 1857

honorable que Monsieur de Salvandy a tenue en diverses circonstances, ajouterait beaucoup encore à ces regrets.

D'un autre côté Monsieur de Salvandy est aujourd'hui ministre de l'instruction publique, et c'est comme homme d'État, placé à la tête de ce ministère qu'il dispose des exemplaires de la nouvelle édition. Il aura voulu, sans doute, pour montrer l'intérêt qu'il porte à la géométrie, donner une marque de bienveillance au géomètre qui ne lui demandait rien. Mais, après quarante années de travaux consacrés à l'étude et à l'enseignement des sciences physiques et mathématiques, M. Cauchy pourrait-il, sans blesser toute convenance, rien accepter de ce ministère qui, dans sa personne, a fait à ces sciences le plus sanglant outrage? Le vieux professeur du collège de France, de l'école polytechnique et de la faculté des sciences, mis hors la loi par un ministre de l'instruction publique, serait-il digne de la considération que lui ont acquise une honorable vie, une conduite franche et loyale, s'il paraissait acquiescer le moins du monde à des mesures injustes et illégales, si souvent reprochées au précédent ministre non seulement par les savants, mais encore par les feuilles publiques de toutes les couleurs, par des écrivains d'opinions diverses ou même directement opposées? Sans manquer à ce qu'il doit aux nombreux élèves qu'il a formés, et qui remplissent aujourd'hui l'institut et les diverses académies de l'Europe, sans trahir les intérêts et l'honneur de la géométrie, sans manquer à ce qu'il se doit à lui-même, M. Cauchy peut-il paraître condamnation sur la conduite tenue par le précédent ministre à son égard? peut-il, avant qu'on y ait fait droit, retirer la protestation solennelle qu'il a lue à l'académie des sciences, et déposée au secrétariat de l'institut? peut-il paraître connivent à la violation des lois les plus claires et les plus précises, établies dans l'intérêt de la science, et foulées aux pieds par un ministre qui, malgré les réclamations du bureau des longitudes, renouvelées pendant quatre années consécutives, n'a pas craint de porter contre la géométrie un arrêt d'ostracisme, devant lequel avait reculé, on le sait bien, la Convention elle-même?

Et qu'on ne s'imagine pas que M. Cauchy conserve dans son cœur un levain d'aigreur ou d'amertume contre le ministre qui, pour l'atteindre, s'est élevé au-dessus des lois. Chrétien sincère, M. Cauchy sait qu'il lui est ordonné d'aimer ceux-là même qui, sans le vouloir peut-être, l'ont fait beaucoup souffrir; et toute la vie de M. Cauchy a prouvé jusqu'à quel point il est jaloux de rester fidèle à ses devoirs. À la vérité, M. Cauchy ne sait pas sur quel fondement, le ministre, qui a cessé de l'être, s'était imaginé que des formules d'algèbre ou des théorèmes de géométrie pouvaient mettre l'état en péril;
que le péril s'était accru le jour où le bureau des longitudes, chargé par une loi positive de nommer aux places vacantes dans son sein, avait osé donner le titre de géomètre à celui qui était atteint et convaincu du crime irrémissible d'avoir cultivé avec quelque succès la géométrie, non seulement par l'académie des sciences, mais encore par les grandes sociétés savantes de l'ancien et du nouveau monde;
que le péril était d'autant plus grand que M. Cauchy avait mené une vie plus irréprochable, qu'il était animé d'un plus grand amour

de ses devoirs, d'un dévouement plus absolu à la science ;
qu'il fallait, pour cette raison, prendre contre lui des précautions extraordinaires et inusitées, l'assujettir à des prescriptions dont tout le monde était dispensé, exiger de lui ce qu'on se faisait une gloire et un mérite de ne point exiger ou de ne plus exiger de personne, ce qu'on n'avait jamais exigé de lui-même à l'académie ; ou bien, ce qui était encore plus simple, renoncer à tout cet appareil d'intimidation, et se dispenser de lui écrire pour lui faire aucune demande, mais violer tout simplement la loi parce que tel était le bon plaisir du ministre ;
enfin que, pour régénérer la société, pour assurer la gloire et la prospérité de la France, il était urgent de persécuter les hommes qui avaient une conscience plus délicate, qu'il fallait leur demander compte, non pas de leurs actions, mais de leurs affections, et que l'on devait craindre, par dessus tout, ceux qui, fortement attachés aux vieilles traditions de l'honneur français, étaient prêts à s'imposer tous les genres de sacrifices, plutôt que de donner sciemment prétexte au moindre reproche, au blâme le plus léger.

Ainsi assiégé par de telles préoccupations, dominé par des illusions malencontreuses, le précédent ministre était, j'aime à le croire, plus à plaindre encore qu'à blâmer. Peut-être quelque jour s'étonnera-t-il lui-même, en songeant à sa propre histoire ; peut-être ne concevra-t-il pas comment il a eu le courage de lutter si longtemps, lui gardien des lois du pays, lui ministre et homme d'état, contre un géomètre protégé par une loi positive, mais qui, pour se défendre, n'avait d'autres armes que sa géométrie ; comment il s'est décidé à expulser violemment du bureau des longitudes celui-là même que Lagrange, Laplace et Legendre accueillaient avec tant de bienveillance, pour avoir démontré les théorèmes de Fermat et d'Euclide ; et comment cette expulsion prononcée au mépris d'un texte de loi par une décision ministérielle a pu être l'ouvrage du ministre qui venait de proposer aux chambres des lois nouvelles pour la réimpression des œuvres de Laplace et de Fermat.

Sans doute, Monsieur de Salvandy n'est pas responsable des actes de son prédécesseur. Sans doute, sa ferme résolution est, non de persécuter, mais de protéger les sciences, non de torturer les âmes, mais d'appeler tous ceux qui portent un cœur honnête, et pénétré d'un amour sincère pour la vérité, à contribuer par leurs travaux à la gloire de la patrie ; et, s'il en était besoin, M. Cauchy se trouverait affermi dans cette conviction par la lettre même qu'il vient de recevoir. Mais sa protestation publique, déposée au secrétariat de l'institut, et dans les archives du bureau des longitudes, subsiste dans toute sa force ; mais la loi qui a créé ce bureau, la loi qui dit en termes formels et sans condition <u>le bureau des longitudes nomme aux places vacantes dans son sein</u> reste violée ; mais M. Cauchy membre du bureau des longitudes, en vertu de cette loi, depuis le mois de novembre 1839, s'est vu enlever arbitrairement par une décision ministérielle le droit de prendre part à des travaux auxquels ce bureau l'avait appelé à concourir ; mais l'accueil si flatteur que les astronomes et les géomètres ont fait aux derniers mémoires de M. Cauchy sur les perturbations des corps célestes, mais les théories nouvelles et générales, à l'aide

desquelles il vient de réduire à quelques heures des calculs qui exigeaient des astronomes plusieurs mois ou plusieurs années de travail, protestent hautement contre l'arrêt du précédent ministre; mais M. Cauchy trahirait l'honneur et les intérêts de la science, s'il cessait lui-même de protester contre un état de choses dont s'étonnent, on le conçoit bien, les hommes de tous les partis.

Serait-il facile de réparer l'outrage fait aux sciences ainsi qu'à la loi elle-même, dans la personne de M. Cauchy, et de rentrer, sur ce point, dans l'ordre légal, sans blesser les intérêts de qui que ce soit, sans blesser même, en aucune manière, les intérêts d'un membre du conseil de l'université, qui, mal informé sans doute de ce qui s'était passé, a consenti à occuper, peut-être sans le savoir, une place qui n'était pas vacante? M. Cauchy croit que cela serait facile et très facile; et Monsieur de Salvandy partagerait bientôt à cet égard les convictions de M. Cauchy, s'il était possible que M. de Salvandy et M. Cauchy se rencontrassent quelque part. Mais quel pourrait être le moyen de réaliser une telle entrevue. Retiré dans son cabinet, toujours occupé de sa science favorite, M. Cauchy, on le sait, ne se trouve jamais dans les salons des ministres. Rien au monde ne pourrait le déterminer à y paraître. Se bornant à joindre ses efforts aux travaux entrepris pour le progrès des sciences par ses savants confrères, et à protester quand les ministres le frappent, il ne demande rien, et n'avait en aucune manière grossi le nombre des solliciteurs. Étranger à la politique du jour, mais ne comprenant pas qu'on puisse lui faire un crime d'être fidèle aux lois de la reconnaissance, de respecter l'infortune et de se respecter lui-même, si, après avoir refusé à plusieurs reprises les honorables fonctions qui lui étaient offertes, M. Cauchy a cédé en 1839 aux vœux exprimés par les membres du bureau des longitudes, c'est parce qu'à cette époque, le ministère étant rentré dans l'ordre légal, et se bornait à exécuter la loi qui a créé cet établissement. Aujourd'hui même, si M. Cauchy proteste contre les actes arbitraires du précédent ministre, c'est surtout parce qu'en vertu de ces mêmes actes l'honneur et l'intérêt des sciences se trouvent étrangement compromis; et Monsieur de Salvandy sera bien étonné, quand il connaîtra la décision que M. Cauchy lui proposerait de prendre, puisqu'alors il verra clairement jusqu'à quel point M. Cauchy est disposé à sacrifier ses intérêts personnels, pourvu que ceux de la science se trouvent garantis et protégés.

Un frère de M. Cauchy habite le palais du Luxembourg, et dans ce palais se tiennent les séances de la chambre des pairs auxquelles Monsieur de Salvandy assiste souvent. Si un jour où les affaires les plus urgentes de son département lui laisseraient quelque liberté, Monsieur de Salvandy désirait avoir avec M. Cauchy un moment d'entretien, il suffirait qu'il eût la bonté de l'en prévenir à l'avance. M. Cauchy s'empresserait de se rendre chez son frère, à l'heure qui lui aurait été indiquée.

DSI

AUTOGRAPHE

de

Cauchy

Augustin Louis

OBSERVATIONS

2) L. A. S. 1 p 4° an Mr Barbeud.
o. O. u. D. betrifft den Druck gewisser Be-
richte. „Si je n'avais pas été fortement
saisi par la grippe, j'aurais été moi-
même la relire à l'imprimerie. Obligé
de garder la chambre je vous prie d'avoir
la bonté de me la faire porter aussitôt
que le mémoire vous arrivera. Je vous
la renverrai dans la matinée.
Gezeichnet A. L. C.

Cauchy (spr. kohschi), Augustin Louis, ausgezeichneter franz. Mathematiker, Sohn des Dichters Louis François C., geb. 21. Aug. 1789 zu Paris, löste schon im 16. Jahr ein schwieriges Problem. Sein »Mémoire sur la théorie des ondes«, durch welches er die Lehre von der Wellenbewegung des Lichts bedeutend förderte, ward 1815 vom Institut gekrönt und hatte zur Folge, daß er 1816 Mitglied der mechanischen Klasse der Akademie der Wissenschaften wurde. Später erhielt er eine Lehrerstelle an der polytechnischen Schule. Als eifriger Legitimist folgte er nach der Julirevolution Karl X. ins Ausland, lebte längere Zeit in Prag, kehrte jedoch nach Paris zurück, wo er im Ordenshaus der Jesuiten mathematischen Unterricht gab. Im Jahr 1848 ward ihm die neubegründete Professur der mathematischen Astronomie an der Pariser Universität übertragen, doch mußte er sie Juni 1852 niederlegen, weil er Napoleon III. den Eid verweigerte. Er starb 23. Mai 1857 zu Paris. Cauchy's vorzüglichste Schriften sind: »Cours d'analyse« (Par. 1821; deutsch von Huzler, Königsb. 1828); »Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie« (Par. 1826—28, 2 Bde.; deutsch von Schnuse, Braunschw. 1840; Zusätze 1846); »Exercices de mathématique« (Par. 1826—29; Prag 1835—36); »Leçons sur le calcul différentiel« (Par. 1829, neu bearbeitet von Moigno, 1840; deutsch von Schnuse, Braunschw. 1836; Zusätze 1846); »Mémoire sur la dispersion de la lumière« (Prag 1836); »Exercices d'analyse et de physique mathématique« (das. 1839, 3 Bde.).

AUTOGRAPHE

de

Cauchy

Augustin Louis

OBSERVATIONS

1) 86 **Cauchy**, Augustin Louis, mathématicien, 1789–1857. Manuscr. s. »Résumé d'un Memoire sur la Mecanique Celeste et sur un nouveau calcul, appellé Calcul des limites; par M. Augustin Cauchy, membre de l'institue de France.« Turin, Octobre 1831. Avec dédication a. à Monseigneur Capaccini de la part de l'auteur. 12 pp. et 1/2 in-4. lithographiées.

Cauchy, connu par ces differents livres sur la mathématique et l'astronomie, a fait le premier resumé après une séance à l'académie de Turin le 11. Oct. 1831.

3) L.a.s. 7 p.4°, o.O.u.D., an den Minister der öffentlichen Arbeiten Mr. de Salvandy, aus Anlass der Uebersendung einer Neuausgabe der Werke von Laplace an Cauchy. C. setzt in dem Brief auseinander, dass er sich persönlich durch dieses Widmungsexemplar sehr geehrt fühlt, das ihm von S. als Privatperson zugeschickt wurde, dass er es aber als eine Sendung des Unterrichtsministers, also als Geschenk des Vertreters einer Behörde, die ihm soviel Unrecht zugefügt hat, zurückweisen müsste. C. setzt auseinander, in welcher Weise er behandelt worden ist und bittet den Minister, ihm in einer persönlichen Aussprache Gelegenheit zu geben, ihm seine Angelegenheit vorzutragen.

Cauchy (spr. kohschi), Augustin Louis, ausgezeichneter franz. Mathematiker, Sohn des Dichters Louis François C., geb. 21. Aug. 1789 zu Paris, löste schon im 16. Jahr ein schwieriges Problem. Sein »Mémoire sur la théorie des ondes«, durch welches er die Lehre von der Wellenbewegung des Lichts bedeutend förderte, ward 1815 vom Institut gekrönt und hatte zur Folge, daß er 1816 Mitglied der mechanischen Klasse der Akademie der Wissenschaften wurde. Später erhielt er eine Lehrerstelle an der polytechnischen Schule. Als eifriger Legitimist folgte er nach der Julirevolution Karl X. ins Ausland, lebte längere Zeit in Prag, kehrte jedoch nach Paris zurück, wo er im Ordenshaus der Jesuiten mathematischen Unterricht gab. Im Jahr 1848 ward ihm die neubegründete Professur der mathematischen Astronomie an der Pariser Universität übertragen, doch mußte er sie Juni 1852 niederlegen, weil er Napoleon III. den Eid verweigerte. Er starb 23. Mai 1857 zu Paris. Cauchy's vorzüglichste Schriften sind: »Cours d'analyse« (Par. 1821; deutsch von Huzler, Königsb. 1828); »Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie« (Par. 1826–28, 2 Bde.; deutsch von Schnuse, Braunschw. 1840; Zusätze 1846); »Exercices de mathématique« (Par. 1826–29; Prag 1835–36); »Leçons sur le calcul différentiel« (Par. 1829, neu bearbeitet von Moigno, 1840; deutsch von Schnuse, Braunschw. 1836; Zusätze 1846); »Mémoire sur la dispersion de la lumière« (Prag 1836); »Exercices d'analyse et de physique mathématique« (das. 1839, 3 Bde.).

AW

570 Kat

283

593

Cauchy.

(Augustin, Louis,)

Savant Mathématicien, Membre de l'Institut.

L. a. s. („A. L. C.") 1/4 4° et adr. av. s. l. c. a. Porte cach.

Né à Paris, 21. Août. 1789.

Autographe – 18e–19e Siècles.

V.e Div.on Savants – 3e Mathématiciens.

Fils aîné de L. F. Cauchy, Archiviste de la Chambre des Pairs, il fit preuve, dès son enfance, d'une telle aptitude pour les Mathématiques qu'à 16 ans il donna la solution d'un problème très compliqué inséré dans la Correspondance de l'École Polytechnique. Admis, en 1805, le second à cette savante École, il en sortit le premier, et le premier aussi de l'École des Ponts & chaussées. Attaché ensuite comme Ingénieur au Port de Cherbourg, il démontra le Théorème d'Euclide sur les Polyèdres, resté jusqu'alors non résolu. Nommé Professeur à l'École Polytechnique, et, trois ans après, admis à l'Institut, il se fit connaître par la solution de Problèmes & d'importans travaux. Comme homme Politique Mr. Cauchy appartient à l'opinion Légitimiste, et est l'un des adeptes de la Maison des Jésuites où il forme des élèves de mérite. En 1830, ayant refusé le serment au nouveau Gouvernement, il perdit sa place et se retira à Turin où il fut nommé Professeur à l'Université. En 1833, appellé à compléter l'éducation scientifique du Duc de Bordeaux, il publia, à ce sujet, un Memorandum de ses opinions dont la sincérité n'est pas douteuse. Ce savant estimable a publié un grand nombre d'ouvrages d'un mérite justement apprécié.

B –

DSI